Занятие 1. Принцип Дирихле

Теория: «Если в n клеток посадить $n+1$ зайца, то хотя бы в одной клетке будет больше одного зайца». Обсудить обобщенный принцип: если $m > nk$, то в клетке хотя бы $k+1$ заяц.

Задачи для разбора в классе:

1. *(Разминка)* В ящике 10 черных и 10 белых носков. Сколько нужно вынуть, чтобы была пара?
2. В классе 30 человек. Докажите, что найдутся двое, у которых имена начинаются с одной и той же буквы.
3. *(Классика)* В лесу миллион елок, на каждой не более 300 000 иголок. Докажите, что есть 4 елки с одинаковым числом иголок.
4. **(ФЕ 2021/22, Финал, 7 кл)** В кружке 20 человек, среди них 49 пар знакомых. Докажите, что кто-то знал не более 4 участников.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Докажите, что среди любых 11 целых чисел найдутся два, разность которых делится на 10.
2. На заседании присутствуют несколько человек. Докажите, что найдутся двое с одинаковым числом знакомых.
3. В прямоугольнике 3×4 выбрали 13 точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя не больше $\sqrt{2}$.

Домашнее задание (ДЗ):

1. Дано 12 различных двузначных чисел. Докажите, что разность каких-то двух состоит из одинаковых цифр.

Занятие 2. Инварианты и раскраски

Теория: Инвариант — величина, которая не меняется при операциях. Четность, раскраска (шахматная, полосатая), остатки по модулю.

Задачи для разбора в классе:

1. Докажите, что число людей, сделавших нечетное число рукопожатий, четно.
2. **(СПб 2019, II тур, 8 кл)** На доске написаны числа 1, 1, 1. Михаил стирает числа a, b, заменяя их на $2a + c$ и $(b - c)/2$, где c-оставшееся число. Докажите, что всегда будет отрицательное число.
3. Мышка грызет куб сыра $3 \times 3 \times 3$. Может ли она съесть всё, закончив в центре? (Переходы только между соседними по грани кубиками).

Задачи для самостоятельного решения:

1. В тёмной комнате на столе 100 монет, из которых 10 решкой вверх. Монеты можно свободно брать в руку и переворачивать Как сделать так, чтобы в руке было столько же решек, сколько и на столе?

2. Можно ли покрыть шахматную доску 8×8 без двух противоположных углов доминошками 1×2?

3. **(ФЕ 2020/21, Финал, 5 кл)** За один ход можно либо прибавить к числу одну из его цифр, либо вычесть из него одну из его цифр (например, из числа 142 можно получить 142 + 2 = 144, 142 - 4 = 138 и несколько других чисел). Можно ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021?

ДЗ:

1. **(СПб 2019, II тур, 6 кл)** Клетки таблицы 4×4 заполнены целыми числами. В каждой строке и каждом столбце посчитали произведение всех чисел. Могли ли полученные произведения быть $1, 5, 7, 2019, -1, -5, -7, -2019$?

2. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 20$. За ход стираем a, b, пишем $a + b - 1$. Какое число останется?

3. Хамелеоны трех цветов (13, 15, 17). При встрече двух разных они оба меняют цвет на третий. Могут ли все стать одного цвета?

Занятие 3. Отель Гильберта (Сюжет)

Вступление: Понятие бесконечно много. Большие числа vs Бесконечность. **Основная часть:**

- Отель занят полностью. Приезжает +1 гость. (Сдвиг $n \to n + 1$).
- Приезжает бесконечный автобус. (Жильцы в $2n$, новые в $2n - 1$).
- Приезжает бесконечно много автобусов по бесконечно много людей. (Нумерация по диагоналям таблицы).

Занятие 4. Логика и Рыцари/Лжецы

Теория: Метод перебора предположений. Таблицы истинности.

Задачи для разбора в классе:

1. рыцари говорят правду и лжецы врут. Встретили А и Б. А говорит: «Мы оба лжецы». Определить Б - рыцарь или лжец?

2. Турист приехал на остров, где живут 98 человек, каждый из которых либо рыцарь (всегда говорящий правду), либо лжец (который всегда лжёт). Турист может выбрать любую компанию из пяти человек и спросить у одного из них: Правда ли, что среди остальных четверых количество рыцарей четно? Сможет ли турист за 20 вопросов определить, чётное или нечётное количество рыцарей живет на острове? **(СПб 2024, II тур, 6 кл)**

Задачи для самостоятельного решения:

1. За круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудак. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет. Чудак говорит правду, если слева от него сидит лжец; ложь, если слева от него сидит рыцарь; все что угодно, если слева от него сидит чудак. Каждый сказал: «Справа от меня сидит лжец». Сколько за столом лжецов? Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет. **(СПб 2019, I тур, 7 кл)**

2. Археолог наткнулся на пещеру, в которой стоят 6 сундуков, на каждом из которых что-то написано. Некоторые из сундуков могут оказаться мимиками (монстрами, прикидывающимися сундуками), а в остальных лежит золото. Известно, что на мимиках написана ложь, на настоящих сундуках — правда. Подскажите археологу, какие сундуки тот может гарантированно безопасно открыть. **(ФЕ 2023/24, Финал, 6 кл)**

Подо мной не мимик	*В нижнем ряду есть хотя бы один мимик*	*Оба моих соседа по стороне — не мимики*
В верхнем ряду есть хотя бы один мимик	*Среди сундуков есть ровно 2 мимика*	*Я не мимик*

вид спереди

3. **(ФЕ 2021/22, Финал, 6 кл)** На космическом корабле среди мирных космонавтов завелись один или два предателя, которые хотят избавиться от всех людей на корабле. Раз в день все собираются в одной комнате и голосуют, кого выгнать. На очередное голосование пришли пятеро: Красный, Синий, Зелёный, Фиолетовый и Жёлтый. Каждый из них произнёс по два утверждения. Красный: Синий — мирный. Жёлтый — предатель. Синий: Я мирный. Фиолетовый — мирный. Зелёный: Я мирный. Красный — предатель. Фиолетовый: Красный — мирный. Зелёный — предатель. Жёлтый: Зелёный — мирный. Фиолетовый — предатель. Известно, что мирные космонавты всегда говорят правду, а предатели всегда врут. Объясните, кто же из них является предателем (или предателями) и почему.

Занятие 5. Комбинаторика, множества и графы

Теория: Число размещений, число сочетаний. Связность графов. Включения-исключения

Задачи для разбора в классе:

1. Где-то в океане есть остров Невезения, на котором расположены $2n$ городов, соединённых между собой дорогами так, что из каждого города выходит больше n дорог. Турист услышал в новостях, что какие-то два города пришлось закрыть на карантин, поэтому все дороги, ведущие к этим городам, были перекрыты. К сожалению, он не смог разобрать названия городов. Докажите, что турист, несмотря на перекрытия, всё ещё может доехать из любого незакрытого города в любой другой. **(ФЕ 2022/23, Финал, 8 кл)**

2. Некое приложение генерирует одноразовые пароли в виде последовательностей из 6 цифр без нуля. Паша посмотрел на последние три пароля — 125874, 585632, 785698 — и осознал, что у них есть общее свойство: при наборе каждого из них на цифровой клавиатуре палец каждый раз переходит на соседнюю по стороне кнопку. А сколько всего существует паролей с такими свойствами? **(ФЕ 2023/24, Финал, 7 кл)**

Задачи для самостоятельного решения:

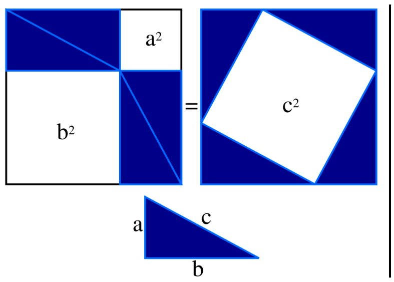
1. На парковке стоят машины. Среди них есть машины марок «Тойота», «Хонда», «Шкода», а также машины других марок. Известно, что не «Хонд» в полтора раза

больше, чем не красных машин; не «Шкод» в полтора раза больше, чем не желтых машин; наконец, не «Тойот» вдвое меньше, чем красных и желтых машин вместе. Докажите, что «Тойот» не меньше, чем «Хонд» и «Шкод» вместе. **(СПб 2019, I тур, 7 кл)**

Занятие 6. Геометрия. Пифагор. Синусы и косинусы (Сюжет)

Вступление: вопрос о длины диагональных отрезков -> Теорема Пифагора **Основная часть:**

1. - Пифагоровы штаны - историческое доказательство
   - Доказательство «без слов»



   (Картинка с википедии)

   - Через подобие треугольников (якобы без площадей): провести высоту и выполнить алгебраические выкладки

2. Следствие - основное тригонометрическое тождество и понятие радиан

Занятие 7. Геометрия

Задачи для разбора в классе:

1. В равнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса AK. На основании AC выбрана точка D так, что $BC = CD$. Докажите, что можно сложить равнобедренный треугольник с боковой стороной BK и основанием BD.**(СПб 2019, II тур, 7 кл)**

2. Точки M и N — середины равных сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. На продолжении отрезка MN за точку N отмечена точка X, а на отрезке NX — точка Y так, что $MN = XY$. Докажите, что $BY = CX$. **(СПб 2019, I тур, 7 кл)**

Задачи для самостоятельного решения:

1. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна диагонали BD. Точка M — середина диагонали AC. Прямая BM пересекает отрезок CD в точке E. Докажите, что $BE = CE$.**(СПб 2019, I тур, 8 кл)**

2. В параллелограмме $ABCD$ ($AB \neq BC$) из тупого угла B провели две высоты, BH и BK (основания высот лежат на сторонах параллелограмма и не совпадают с его вершинами). Треугольник BHK оказался равнобедренным. Укажите все возможные значения угла BAD. **(ФЕ 2020/21, Финал, 8 кл)**

Занятие 8. Теория чисел

Теория: Использование оценок. Остатки. Сведение и перебор. **Задачи для разбора в классе:**

1. Костя задумал натуральное число x и обнаружил, что некоторое четырехзначное число при делении на x дает остаток 24, а при делении на x^2 дает остаток 142. Найдите все возможные значения x. **(СПб 2023, I тур, 6 кл)**

2. Найдите последнюю цифру числа $7^{2026} + 3^{2026}$.

3. В магазине «Все для кухни» Саша купил кастрюлю, тарелку и пакет, чтобы сложить в него покупку. Он заметил, что стоимость кастрюли выражается трёхзначным числом рублей, не содержащим нулей в десятичной записи. Если из него вычеркнуть одну из цифр, получится стоимость тарелки. А если из стоимости тарелки вычеркнуть одну из цифр, получится стоимость пакета. Мог ли Саша потратить на свою покупку ровно 817 рублей? **(СПб 2024, I тур, 6 кл)**

Задачи для самостоятельного решения:

1. На доске записаны два двузначных числа. Андрей их перемножил, получилось четырёхзначное число с первой цифрой 2. Паша их сложил и получил трёхзначное число. Если из числа Андрея вычеркнуть первую цифру, получится число Паши. Какие числа были записаны? **(ФЕ 2022/23, Финал, 7 кл)**

2. Решите уравнение: $[20x + 23] = 20 + 23x$. Напомним, что $[a]$ обозначает целую часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. **(ФЕ 2022/23, Финал, 7 кл)**

ДЗ?:

1. Пара натуральных чисел $a > b$ называется *хорошей*, если НОК этих чисел делится на их разность. Среди всех натуральных делителей числа n удалось найти ровно одну хорошую пару. Чему может быть равно n? **(СПб 2020, II тур, 7 кл)**